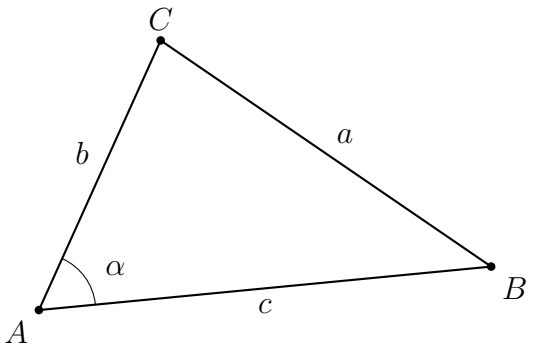
# Cosinusregel

In een willekeurige driehoek $ABC$ noemen we de lengtes van de zijden tegenover de hoeken $A$, $B$ en $C$ respectievelijk $a$, $b$ en $c$.




Voor de zijde $a$ tegenover de hoek $\alpha$ geldt de cosinusregel:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

**Kort bewijs.** Kies $A = (0,0)$ en $B = (c,0)$. Dan is $C = (b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ en geeft de afstandsformule

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

Analoog gelden

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

De regel kan ook gebruikt worden om een hoek te berekenen:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

# Inproduct

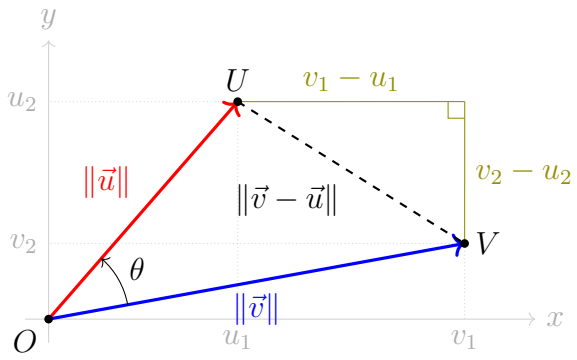
**Definitie en meetkundige formule.** Voor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ en $\vec{v} = (v_1, v_2)$ in $\mathbb{R}^2$ definiëren we

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2} \qquad \text{(definitie)}.$$

Meetkundig geldt

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta} \qquad \text{(meetkundige formule)},$$

waar $\theta$ de (kleinste) hoek is tussen $\vec{u}$ en $\vec{v}$.




**Bewijs van de gelijkwaardigheid.** We leiden de meetkundige formule af uit de definitie.

1. **Cosinusregel op de driehoek $OUV$:**

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta. \tag{1}$$

2. **Algebraïsche uitwerking van de norm:**

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\,(u_1 v_1 + u_2 v_2). \tag{2}$$

Door (1) = (2) volgt

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta,$$

dus de meetkundige formule volgt uit de definitie.

**Eigenschappen.** Voor alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ en $k \in \mathbb{R}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \qquad \text{(commutatief)}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \qquad \text{(distributief)}$$

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) \qquad \text{(homogeen)}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0, \text{ en } \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}. \qquad \text{(positief)}$$

**Geometrische interpretatie.**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta \begin{cases} > 0 & \text{als } \theta < 90^\circ \text{ (scherp)} \\ = 0 & \text{als } \theta = 90^\circ \text{ (loodrecht)} \\ < 0 & \text{als } \theta > 90^\circ \text{ (stomp)} \end{cases}$$

Dus, het inproduct meet hoeveel twee vectoren *dezelfde kant op wijzen*.

- zelfde richting $\Rightarrow$ groot en positief;
- loodrecht $\Rightarrow$ 0;
- tegengesteld $\Rightarrow$ negatief.