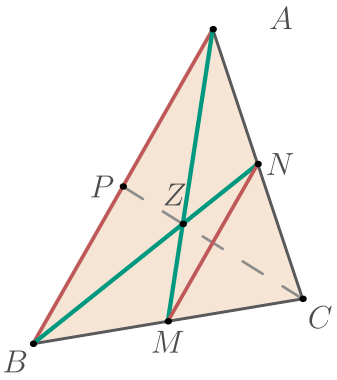
Zwaartelijnen van een driehoek

Stelling

De drie zwaartelijnen van een driehoek ABC gaan door één punt Z, het **zwaartepunt**. Met M het midden van $[BC]$ is

$$\vec{AZ} = \frac{2}{3}\,\vec{AM}$$

Bewijs



M midden van $[BC]$ en N midden van $[AC]$

$\Rightarrow$ $[AM]$ en $[BN]$ snijden elkaar in een punt Z

$$\frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $\Delta CMN \sim \Delta CBA$ met factor $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $MN \parallel AB$ en $MN = \frac{1}{2}\,AB$

$\Rightarrow$ $\Delta ZMN \sim \Delta ZAB$ met factor $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $ZM = \frac{1}{2}\,AZ$

$\Rightarrow$ $AM = AZ + ZM = \frac{3}{2}\,AZ$

$\Rightarrow$ $\vec{AZ} = \frac{2}{3}\,\vec{AM}$

Idem voor elk paar zwaartelijnen

$\Rightarrow$ elke zwaartelijn gaat door het punt op $\frac{2}{3}$ van $[AM]$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\text{de drie zwaartelijnen gaan door één punt } Z}_{\text{zwaartepunt driehoek}}$ $\square$

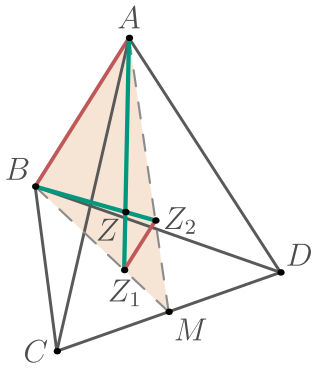
Zwaartelijnen van een viervlak

Stelling

De vier zwaartelijnen van een viervlak $ABCD$ gaan door één punt Z, het **zwaartepunt**. Met Z_1 het zwaartepunt van ΔBCD is

$$\vec{AZ} = \frac{3}{4}\,\vec{AZ_1}$$

Bewijs



Driehoek in viervlak. Het vlak ABM bevat de zwaartelijnen uit A en B.

M midden van $[CD]$, Z_1 zwaartepunt van ΔBCD en Z_2 zwaartepunt van ΔACD

$\Rightarrow$ $Z_1 \in [BM]$ en $MZ_1 = \frac{1}{3}\,MB$ (zie A)

$\Rightarrow$ $Z_2 \in [AM]$ en $MZ_2 = \frac{1}{3}\,MA$

$\Rightarrow$ $[AZ_1]$ en $[BZ_2]$ liggen in het vlak ABM

$\Rightarrow$ $[AZ_1]$ en $[BZ_2]$ snijden elkaar in een punt Z

$$\frac{MZ_1}{MB} = \frac{MZ_2}{MA} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ $\Delta MZ_1Z_2 \sim \Delta MBA$ met factor $\frac{1}{3}$

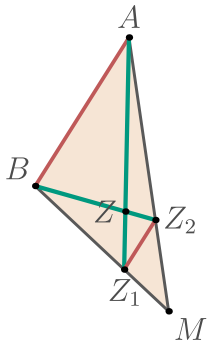
$\Rightarrow$ $Z_1Z_2 \parallel AB$ en $Z_1Z_2 = \frac{1}{3}\,AB$

$\Rightarrow$ $\Delta ZZ_1Z_2 \sim \Delta ZAB$ met factor $\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ $ZZ_1 = \frac{1}{3}\,AZ$

$\Rightarrow$ $AZ_1 = AZ + ZZ_1 = \frac{4}{3}\,AZ$

$\Rightarrow$ $\vec{AZ} = \frac{3}{4}\,\vec{AZ_1}$



Idem voor elk paar zwaartelijnen

$\Rightarrow$ elke zwaartelijn gaat door het punt op $\frac{3}{4}$ van $[AZ_1]$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\text{de vier zwaartelijnen gaan door één punt } Z}_{\text{zwaartepunt viervlak}}$ $\square$

Enkel driehoek. In de driehoek ABM is $Z_1Z_2 \parallel AB$.