Appendix

Rang van een matrix

In deze appendix herhalen we kort de nodige theorie over de rang van een matrix. Dit is de theorie die gebruikt wordt in de paragraaf over snijdende rechten.

1 Matrix en bijhorend stelsel

Een *matrix* is een rechthoekig schema van getallen. Bijvoorbeeld een 3×2-matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Bij een stelsel van lineaire vergelijkingen schrijven we vaak:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

waarbij

- A de *coëfficiëntenmatrix* is;
- $\mathbf{x}$ de kolomvector met onbekenden;
- $\mathbf{b}$ de kolomvector met de rechterleden.

Voegen we $\mathbf{b}$ als extra kolom toe aan A, dan krijgen we de *verhoogde matrix* (of *geaugmenteerde matrix*) van het stelsel:

$$A_b = \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array} \right).$$

In de tekst over snijdende rechten is A de coëfficiëntenmatrix in de onbekenden k en l, en A_b de verhoogde matrix waarin ook het verschil $\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}$ als extra kolom voorkomt.

2 Lineaire combinatie en lineaire onafhankelijkheid

Laat $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vectoren in $\mathbb{R}^m$ zijn. Een *lineaire combinatie* van deze vectoren is een vector van de vorm

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$$

met $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

We noemen de vectoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *lineair onafhankelijk* als

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

alleen mogelijk is wanneer

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Met andere woorden: geen van de vectoren kan als lineaire combinatie van de andere geschreven worden.

Zijn de vectoren *niet* lineair onafhankelijk, dan noemen we ze *lineair afhankelijk*. Dit betekent dat er een niet-triviale combinatie (dus niet alle $\lambda_i = 0$) bestaat die de nulvector geeft.

3 Definitie van de rang

Laat A een $m \times n$-matrix zijn.

- De *kolomrang* van A is het maximaal aantal lineair onafhankelijke kolommen van A.
- De *rijrang* van A is het maximaal aantal lineair onafhankelijke rijen van A.

Een belangrijk resultaat (dat we hier niet bewijzen) is dat

$$\text{kolomrang}(A) = \text{rijrang}(A).$$

Dit gemeenschappelijke getal noemen we de *rang* van A en we duiden het aan met $r(A)$.

Samengevat:

$$\begin{aligned} r(A) &= \text{maximaal aantal lineair onafhankelijke kolommen} \\ &= \text{maximaal aantal lineair onafhankelijke rijen.} \end{aligned}$$

4 Belangrijke eigenschappen van de rang

Enkele basisfeiten over de rang van een $m \times n$-matrix A:

- $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$.
- $r(A) = 0$ als en slechts als A de nulmatrix is.
- $r(A) = n$ (bij een $m \times n$-matrix) als en slechts als de n kolommen lineair onafhankelijk zijn.
- Elementaire rijoperaties (rijen verwisselen, een rij met een niet-nul getal vermenigvuldigen, een veelvoud van een rij bij een andere rij optellen) veranderen de rang van een matrix niet.
- Elementaire kolomoperaties (analoge operaties op kolommen) veranderen de rang evenmin.

In de praktijk betekent dit dat we een matrix mogen herleiden (bijvoorbeeld met de methode van Gauss) zonder de rang te veranderen. In een *gereduceerde* vorm is de rang dan gewoon het aantal niet-nul rijen.

5 Rang en determinant bij een 3×3-matrix

Voor een *vierkante* 3×3-matrix B geldt:

- $\det(B) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; r(B) = 3$.
- $\det(B) = 0 \;\Rightarrow\; r(B) \leq 2$.

In woorden:

- Als de determinant niet nul is, zijn de drie kolommen (en ook de drie rijen) lineair onafhankelijk, en is de rang 3.
- Als de determinant nul is, zijn de drie kolommen (of rijen) lineair afhankelijk en is de rang hoogstens 2.

In onze context gebruiken we vooral de tweede eigenschap: als een 3×3-matrix rang 2 heeft, dan is de determinant gelijk aan 0.

6 Rang en oplossingen van een stelsel

Beschouw een stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met n onbekenden. Laat A de coëfficiëntenmatrix zijn en A_b de verhoogde matrix.

Dan geldt:

- Als $r(A_b) > r(A)$, dan heeft het stelsel *geen* oplossing.

- Als $r(A_b) = r(A)$, dan heeft het stelsel *wel* oplossingen.
  - Als $r(A_b) = r(A) = n$, dan is er *juist één* oplossing.
  - Als $r(A_b) = r(A) < n$, dan zijn er *oneindig veel* oplossingen.

In symbolen:

$$r(A_b) > r(A) \Rightarrow \text{geen oplossingen},$$
$$r(A_b) = r(A) = n \Rightarrow \text{exact één oplossing},$$
$$r(A_b) = r(A) < n \Rightarrow \text{oneindig veel oplossingen}.$$

7 Toepassing op snijdende rechten in de ruimte

In de paragraaf over snijdende rechten e en f in de ruimte verkrijgen we het stelsel

$$\begin{cases} k\,a_1 - l\,a_2 = x_2 - x_1, \\ k\,b_1 - l\,b_2 = y_2 - y_1, \\ k\,c_1 - l\,c_2 = z_2 - z_1, \end{cases}$$

met onbekenden k en l.

De coëfficiëntenmatrix A (in k en l) is dan een 3×2-matrix met als kolommen de richtingsvectoren van e en f (op een teken na):

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ b_1 & -b_2 \\ c_1 & -c_2 \end{pmatrix}.$$

Omdat $e \nparallel f$, zijn de richtingsvectoren

$$\overrightarrow{R} = (a_1, b_1, c_1) \quad \text{en} \quad \overrightarrow{S} = (a_2, b_2, c_2)$$

niet evenwijdig en dus lineair onafhankelijk. Dat betekent dat de twee kolommen van A lineair onafhankelijk zijn en dus:

$$r(A) = 2.$$

Voor het stelsel om een oplossing te hebben, moet

$$r(A_b) = r(A) = 2.$$

Nu is A_b de 3×3-matrix

$$A_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

We gebruiken dan de eigenschap voor een 3×3-matrix:

$$r(A_b) = 2 \;\Leftrightarrow\; \det(A_b) = 0.$$

Daarom leidt de voorwaarde dat e en f een snijpunt hebben precies tot

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Dit is de determinantvergelijking die in de hoofdtekst wordt gebruikt om te beslissen of twee niet-evenwijdige rechten in de ruimte een snijpunt hebben.